第27卷 第4期　　工　程　数　学　学　报　　Vol. 27 No. 4
2010年08月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Aug. 2010

文章编号:1005-3085(2010)04-0704-11

一类三次有理插值样条的逼近性质*

刘　琳，　唐月红

(南京航空航天大学理学院，南京　210016)

摘　要: 曲线的保形插值是几何外形设计的重要课题。本文构造了一类带控制参数且包含极点的 $(3,2)^k\,(k=1,2)$ 阶有理插值样条。对于给定的单调和保凸数组，通过对样条中参数的适当选取达到保形的目的。对于 $(3,2)^k\,(k=1,2)$ 阶插值曲线的形状控制问题进行了研究，推导出了将此插值曲线约束在给定的折线和二次曲线之上、之下或之间的充分条件。最后本文以 Peano-Kernel 定理为工具，讨论了该插值的逼近性质。给出的数值例子说明这些方法的有效性。

关键词: 有理插值；样条；约束插值；逼近

分类号: AMS(2000) 41A05; 41A15　　**中图分类号**: O241.5　　**文献标识码**: A

1　引言

对于 $[a,b]$ 上的一个分划 $\Delta: a=x_0<\cdots<x_n=b$ 的 $(r,l)^k$ 阶有理样条函数全体表示为 $R^k_{r,l}$，见文献[1]。近年来，三次有理样条 $(3,1)^k$, $(3,2)^k(k=1,2)$ 的研究在理论和应用上已取得了一些结果[2,3]，但包含极点的有理方法很少见。文献[5]给出带极点的有理插值，但不是样条。本文研究一类三次有理样条 $(3,2)^k\,(k=1,2)$，即满足下列条件的有理样条函数 $R(x)$

$$R(x)=\mathrm{span}\Big\{1,\theta,\frac{\theta^2}{1+q_i(1-\theta)},\frac{(1-\theta)^2}{1+q_i\theta}\Big\},\quad x\in[x_{i-1},x_i],$$

$$R(x)\in R^{(1)}_{3,2}(\Delta),\quad R(x)\in R^{(2)}_{3,2}(\Delta),\quad x\in[a,b],$$

$$R(x_i)=f_i,\quad i=0,1,\cdots,n,$$

其中 f_i 为型值，$q_i\ge 0$ 为控制参数，$\theta=(x-x_{i-1})/h_i$, $h_i=x_i-x_{i-1}$。

用多项式研究保形插值是比较困难的，如用分段三次多项式构造 C^1 保凸插值条件就十分苛刻，即使对一般的凸数组也需要插入较多的内节点才能满足条件。样条插值是曲线和曲面设计中的有力工具。一些作者已经研究了不少类型的样条函数用于曲线和曲面的形状控制。近些年来，有理样条，特别是有理三次样条以及它们在形状控制中的应用已有较多研究。但在插值条件固定的情况下，普通的插值样条曲线如三次插值样条，B-样条等，因为插值格式固定而无法控制曲线的形状。本文基于构造的有理插值函数，研究保单调和保凸有理样条插值方法，并讨论了这种插值曲线控制于两给定曲线的问题以及它的逼近性质。

收稿日期: 2008-11-24.　**作者简介**: 刘琳(1982年7月生)，女，硕士. 研究方向：计算几何.

***基金项目**: 南京航空航天大学振兴理科规划基金.

2 三次有理插值函数的构造

定理 2.1 $(3,1)^1$ 阶 $R(x)$ 可以表示为

$$R(x) = f_{i-1}\varphi_1(\theta) + f_i\varphi_2(\theta) + h_i d_{i-1}\varphi_3(\theta) + h_i d_i \varphi_4(\theta), \tag{1}$$

其中 $R'(x_i) = d_i$，$i = 1, \cdots, n$，d_i 为自由参数。

$$\big(\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta), \varphi_3(\theta), \varphi_4(\theta)\big) = \Big(1, \theta, \frac{\theta^2}{1+q_i(1-\theta)}, \frac{(1-\theta)^2}{1+q_i\theta}\Big)D,$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{1+q_i}{q_i} & -\frac{1}{q_i} & \frac{1+q_i}{q_i^2+2q_i} & \frac{1}{q_i^2+2q_i} \\ -\frac{2+q_i}{q_i}\ \frac{2+q_i}{q_i} & -\frac{1}{q_i} & -\frac{1}{q_i} & \\ \frac{1}{q_i} & -\frac{1}{q_i} & \frac{1}{q_i^2+2q_i} & \frac{1+q_i}{q_i^2+2q_i} \\ -\frac{1}{q_i} & \frac{1}{q_i} & -\frac{1+q_i}{q_i^2+2q_i} & -\frac{1}{q_i^2+2q_i} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

事实上，定理 2.1 的证明是明显的。我们可直接验明 $\varphi_i(\theta)$ 满足

$$\varphi_i(j-1) = \varphi'_{i+2}(j-1) = \delta_{ij}, \quad \varphi'_i(j-1) = \varphi_{i+2}(j-1) = 0, \quad i,j = 1,2,$$

且 $\varphi_i(\theta) \in R_{3,2}$。此外，容易验证

$$\varphi_1(\theta) = \varphi_2(1-\theta), \quad \varphi_3(\theta) = -\varphi_4(1-\theta). \tag{3}$$

对于 $(3,2)^2$ 阶有理插值样条函数仍可表示为 (1)，但由于在内节点上有

$$R^{(k)}(x_i+0) = R^{(k)}(x_i-0), \quad k = 0,1,2, \tag{4}$$

这时 d_i 需要满足方程组

$$H_{i+1}d_{i-1} + (\alpha_i H_{i+1} + \alpha_{i+1}H_i)d_i + H_i d_{i+1} = c_i, \tag{5}$$

其中

$$H_i = (\alpha_i^2 - 1)h_i/\beta_i, \quad \beta_i = 3 + 4q_i + 2q_i^2,$$

$$c_i = \Big[H_i(1+\alpha_{i+1})\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}} + H_{i+1}(1+\alpha_i)\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\Big].$$

类似地，$(3,2)^2$ 阶 $R(x)$ 也可表示为

$$R(x) = f_{i-1}\overline{\varphi}_1(\theta) + f_i\overline{\varphi}_2(\theta) + h_i^2 D_{i-1}\overline{\varphi}_3(\theta) + h_i^2 D_i \overline{\varphi}_4(\theta), \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \tag{6}$$

$$\big(\overline{\varphi}_1(\theta), \overline{\varphi}_2(\theta), \overline{\varphi}_3(\theta), \overline{\varphi}_4(\theta)\big)$$

$$= \Big(1, \theta, \frac{\theta^2}{1+q_i(1-\theta)}, \frac{(1-\theta)^2}{1+q_i\theta}\Big) \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta_i^{-1} & 0 \\ -1 & 1 & \beta_i^{-1} & -\beta_i^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \beta_i^{-1} \\ 0 & 0 & \beta_i^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

而 $R''(x_i) = D_i$ 满足下列方程组

$$\overline{H_i} D_{i-1} + \left(\alpha_i \overline{H_i} + \alpha_{i+1} \overline{H_{i+1}}\right) D_i + \overline{H_{i+1}} D_{i+1} = C_i, \tag{8}$$

这里

$$\overline{H_i} = h_i \beta_i^{-1}, \quad C_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}.$$

由以上我们可以把三次有理插值样条 $R(x)$ 表示为

$$R(x) = \frac{p_i(x)}{q_i(x)}, \tag{9}$$

其中

$$p_i(x) = (1-\theta)^3 f_{i-1} + \theta(1-\theta)^2 (r_i f_{i-1} + h_i d_{i-1}) + (1-\theta)\theta^2 (r_i f_i - h_i d_i) + \theta^3 f_i,$$

$$q_i(x) = (1-\theta)^2 + (1-\theta)\theta(r_i - 1) + \theta^2, \quad r_i = 2 + q_i + (q_i + 1)^{-1},$$

并有 $r_i \geq 3$。

3 保形插值的有理样条方法

对于具有单调递增性质的插值数据点，即 $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n$，或

$$\Delta_i = \frac{(f_i - f_{i-1})}{h_i} \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1,$$

有以下定理。

定理 3.1 对于给定的 $\{(x_i, f_i, d_i),\ i = 0, 1, \cdots, n\}$，$\{f_i\}_{i=0}^n$ 为单调递增数组，$(3,2)^1$ 阶 $R(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上为单调递增的充分条件为

$$\begin{cases} \max\left\{\frac{d_{i-1}}{\Delta_i}, \frac{d_i}{\Delta_i}\right\} \leq \sqrt{3}, & \text{当 } \Delta_i \neq 0 \text{ 时}, \\ d_{i-1} = d_i = 0, & \text{当 } \Delta_i = 0 \text{ 时}, \end{cases} \tag{10}$$

必要条件为 $d_i \geq 0,\ i = 0, 1, \cdots, n$。

证明 必要条件的证明是显然的。只须证 (10) 为充分条件。由 (9) 求一阶导数并化简整理得

$$R'(x) = \frac{M_i(x)}{q_i(x)^2},$$

其中 $M_i(x) = a\theta^4 + b\theta^3 + c\theta^2 + d\theta + e$。而

$$a = \Delta_i(3 - 4r_i + r_i^2) - (r_i - 3)(d_{i-1} + d_i), \quad b = 2(r_i - 3)(d_{i-1} + d_i) - 2\Delta_i(3 - 4r_i + r_i^2),$$

$$c = \Delta_i(3 - 4r_i + r_i^2) - (r_i - 6)(d_{i-1} + r_i) - 2r_i\Delta_i, \quad d = 2r_i\Delta_i - 4d_{i-1} - 2d_i, \quad e = d_{i-1}.$$

令 $\theta = \frac{s}{s+1}$，$s \geq 0$，则

$$M_i(x) = m_i(x) = \frac{As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E}{(s+1)^4}, \quad A = a + b + c + d + e = d_i,$$

$$B = b + 2c + 3d + 4e = 2(r_i\Delta_i - d_{i-1}), \quad C = c + 3d + 6e = (3 + r_i^2)\Delta_i - r_i(d_{i-1} + d_i),$$

$$D = d + 4e = 2(r_i\Delta_i - d_i), \quad E = e = d_{i-1}.$$

因为 $R'(x)$ 的分母大于零，则 $R'(x)\geq 0$ 等价于 $M_i(x)\geq 0$，而 $M_i(x)\geq 0$ 成立只须

$$A\geq 0,\quad B\geq 0,\quad C\geq 0,\quad D\geq 0,\quad E\geq 0,$$

故三次有理样条插值函数 $R(x)$ 在 $x\in[x_{i-1},x_i]$ 上为单调递增的充分条件为

$$\begin{cases} r_i\Delta_i-d_{i-1}\geq 0,\\ (3+r_i^2)\Delta_i-r_i(d_{i-1}+d_i)\geq 0,\\ r_i\Delta_i-d_i\geq 0.\end{cases}$$

当 $\Delta_i\neq 0$ 时，这组不等式等价于

$$\begin{cases} r_i\geq \frac{d_{i-1}}{\Delta_i},\\ \frac{d_{i-1}+d_i}{\Delta_i}\leq 2\sqrt{3},\\ r_i\geq \frac{d_i}{\Delta_i},\end{cases}$$

因为 $r_i\geq 3$，要使上式成立，只须

$$\max\left\{\frac{d_{i-1}}{\Delta_i},\ \frac{d_i}{\Delta_i}\right\}\leq\sqrt{3}.$$

当 $\Delta_i=0$ 时，结论是显然的。

注意：对于单调递减的 $\{f_i\}_{i=0}^n$，令 $y_i=-f_i$ 即可。

考虑严格凸的数据点 $\{x_i,f_i,i=0,1,\cdots,n\}$，即 $\Delta_1<\Delta_2<\cdots<\Delta_{n-1}<\Delta_n$。为避免插值曲线中出现直线段，则要求数据点满足

$$d_0<\Delta_1<d_1<\cdots<d_{i-1}<\Delta_i<d_i<\cdots<\Delta_n<d_n.$$

定理3.2　对于给定的 $\{(x_i,f_i,d_i),i=0,1,\cdots,n\}$，$\{f_i\}_{i=0}^n$ 为严格凸数组，$(3,2)^1$ 阶 $R(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上为凸的充分条件为

$$r_i\geq\max\left\{\frac{d_i-d_{i-1}}{d_i-\Delta_i},\ \frac{d_i-d_{i-1}}{\Delta_i-d_{i-1}}\right\}. \tag{11}$$

证明　将 (9) 求二阶导数化简整理得

$$R''(x)=\frac{As^3+Bs^2+Cs+D}{h_iq_i(x)^3(1+s)^3},$$

类似于定理3.1的证明，当满足下列不等式组

$$\begin{cases} (d_{i-1}-d_i)+r_i(d_i-\Delta_i)\geq 0,\\ d_i-\Delta_i\geq 0,\\ -(d_{i-1}-\Delta_i)\geq 0,\\ (d_{i-1}-d_i)-r_i(d_{i-1}-\Delta_i)\geq 0,\end{cases} \tag{12}$$

有 $As^3+Bs^2+Cs+D\geq 0$，从而有 $R''(x)\geq 0$。解不等式 (12)，可得保凸充分条件 (11)。

4 约束插值问题

设 $f(x)$ 是被插函数，令 $R(x)$ 是在 $[x_0,x_n]$ 上由 (1) 式所定义的三次有理插值样条函数，$g(x)$ 是在 $[x_0,x_n]$ 上定义的线性函数，或以 $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ 为分点的分段线性函数，数据 $\{(x_i f_i, d_i), i = 0,1,\cdots,n\}$，满足 $f_i \geq$ (或 $\leq$) $g(x_i)$，$i = 0,1,\cdots,n$。如果对所有 $x \in [x_0,x_n]$ 均有 $R(x) \geq$ (或 $\leq$) $g(x)$，$i = 0,1,\cdots,n$，则 $R(x)$ 称作被约束于 $g(x)$ 之上 (下) 的三次有理插值样条函数，$g(x)$ 被称作下 (上) 约束曲线。

定理4.1 给定数据 $\{(x_i, f_i, d_i, g_i), i = 0,1,\cdots,n\}$，且 $f_i \leq g_i$。这里 $g_i = g(x_i)$，则由 (1) 式定义的三次有理插值样条函数 $R(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上位于直线段 $g(x)$ 之下的充分条件是：参数 r_i ($r_i \geq 3$) 满足如下不等式组

$$\begin{cases} r_i f_{i-1} + h_i d_{i-1} - g_i - g_{i-1}(r_i - 1) \leq 0, \\ r_i f_i - h_i d_i - g_i(r_i - 1) - g_{i-1} \leq 0. \end{cases} \tag{13}$$

证明 由 (9) 式容易看到，在 $[x_{i-1},x_i]$ 上

$$q_i(x) = (1-\theta)^2 + (1-\theta)\theta(r_i - 1) + \theta^2 \geq 0, \quad R(x) = \frac{p_i(x)}{q_i(x)} \leq g(x),$$

等价于 $p_i(x) - q_i(x)g(x) \leq 0$，令 $Z_i(x) = p_i(x) - q_i(x)g(x)$，于是

$$\begin{aligned} Z_i(x) \ = \ & (1-\theta)^3 f_{i-1} + \theta(1-\theta)^2(r_i f_{i-1} + h_i d_{i-1}) + (1-\theta)\theta^2(r_i f_i - h_i d_i) \\ & +\theta^3 f_i - \big[(1-\theta)^2 + (1-\theta)\theta(r_i-1) + \theta^2\big]\big[(1-\theta)g_{i-1} + \theta g_i\big]. \end{aligned} \tag{14}$$

因为

$$\begin{aligned} & \big[(1-\theta)^2 + (1-\theta)\theta(r_i-1) + \theta^2\big]\big[(1-\theta)g_{i-1} + \theta g_i\big] \\ = \ & (1-\theta)^3 g_{i-1} + (1-\theta)^2\theta\big[g_i + g_{i-1}(r_i-1)\big] + (1-\theta)\theta^2\big[g_i(r_i-1) + g_{i-1}\big] + \theta^3 g_i, \end{aligned}$$

故 (14) 式变为

$$Z_i(x) = (1-\theta)^3(f_{i-1} - g_{i-1}) + (1-\theta)^2\theta E_i + (1-\theta)\theta^2 F_i + \theta^3(f_i - g_i),$$

这里

$$E_i = r_i f_{i-1} + h_i d_{i-1} - g_i - g_{i-1}(r_i - 1), \quad F_i = r_i f_i - h_i d_i - g_i(r_i - 1) - g_{i-1}.$$

如果 $E_i \leq 0$，$F_i \leq 0$，则有 $Z_i(x) \leq 0$ 对所有 $x \in [x_{i-1},x_i]$ 均成立，于是该定理成立。

类似于定理4.1的证明，对于“下约束”的情况，有下述充分条件的定理。

定理4.2 给定数据 $\{(x_i, f_i, d_i, g_i^*), i = 0,1,\cdots,n\}$，且 $f_i \geq g_i^*$。这里 $g_i^* = g^*(x_i)$，则由 (1) 式定义的三次有理插值样条函数 $R(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上位于直线段 $g^*(x)$ 之上的充分条件是：参数 r_i ($r_i \geq 3$) 满足如下不等式组

$$\begin{cases} r_i f_{i-1} + h_i d_{i-1} - g_i^* - g_{i-1}^*(r_i - 1) \geq 0, \\ r_i f_i - h_i d_i - g_i^*(r_i - 1) - g_{i-1}^* \geq 0. \end{cases} \tag{15}$$

由定理4.1和定理4.2可得下面“上下同时约束”的定理。

定理4.3　给定数据$\{(x_i,f_i,d_i,g_i,g_i^*), i=0,1,\cdots,n\}$，且$g_i^*\le f_i\le g_i$。则由(1)式定义的三次有理插值样条函数$R(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上位于直线段$g(x)$之下且位于直线段$g^*(x)$之上的充分条件是：参数$r_i(r_i\ge 3)$满足不等式组(13),(15)。

设$f(x)$是被插函数，令$R(x)$是在$x\in[x_0,x_n]$上由(1)式定义的三次有理插值样条函数，$k(x)$是$x\in[x_0,x_n]$上定义的二次函数，或以$x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n$为分点的分段二次函数，$k_i$, k_i'分别表示$k(x)$在x_i处的函数值和导数值。仿上面的证明，可得到将插值曲线约束于给定的二次曲线之下、之上或之间的定理。

定理4.4　给出数据$\{(x_i,f_i,d_i,k_i,k_i'), i=0,1,\cdots,n\}$，且$f_i\le k_i$，则由(1)式定义的三次有理插值样条函数$R(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上位于二次曲线段$k(x)$之下的充分条件是：参数$r_i(r_i\ge 3)$满足如下不等式组

$$\begin{cases}(1+r_i)(f_{i-1}-k_{i-1})+h_i(d_{i-1}-k_{i-1}')\le 0,\\ r_i(f_{i-1}+f_i)+h_i\big[d_{i-1}-d_i-(r_i-1)k_{i-1}'\big]-k_i-(2r_i-1)k_{i-1}\le 0,\\ (r_i+1)f_i-h_i(d_i+k_{i-1}')-(r_i-1)k_i\le 0.\end{cases}\tag{16}$$

证明　由(9)式容易看到，在$[x_{i-1},x_i]$上

$$q_i(x)=(1-\theta)^2+(1-\theta)\theta(r_i-1)+\theta^2\ge 0,$$

$$k_i(x)=(1-\theta)^2k_{i-1}+(1-\theta)\theta(2k_{i-1}+k_{i-1}'h_i)+\theta^2k_i,$$

于是

$$R(x)=\frac{p_i(x)}{q_i(x)}\le k(x),$$

等价于$p_i(x)-q_i(x)k(x)\le 0$，令$U_i(x)=p_i(x)-q_i(x)k(x)$。于是

$$\begin{aligned}U_i(x)\;=\;&(1-\theta)^3f_{i-1}+\theta(1-\theta)^2(r_if_{i-1}+h_id_{i-1})\\&+(1-\theta)\theta^2(r_if_i-h_id_i)-\big[(1-\theta)^2+(1-\theta)\theta(r_i-1)+\theta^2\big]\\&\big[(1-\theta)^2k_{i-1}+(1-\theta)\theta(2k_{i-1}+k_{i-1}'h_i)+\theta^2k_i\big],\end{aligned}\tag{17}$$

而

$$\begin{aligned}&\big[(1-\theta)^2+(1-\theta)\theta(r_i-1)+\theta^2\big]\big[(1-\theta)^2k_{i-1}+(1-\theta)\theta(2k_{i-1}+k_{i-1}'h_i)+\theta^2k_i\big]\\=\;&(1-\theta)^4k_{i-1}+(1-\theta)^3\theta\big[2k_{i-1}+k_{i-1}'h_i+(r_i-1)k_{i-1}\big]\\&+(1-\theta)^2\theta^2\big[k_i+(r_i-1)(2k_{i-1}+k_{i-1}'h_i)+k_{i-1}\big]\\&+(1-\theta)\theta^3\big[(r_i-1)k_i+2k_{i-1}+k_{i-1}'h_i\big]+\theta^4k_i.\end{aligned}$$

故(17)式变为

$$U_i(x)=(1-\theta)^4(f_{i-1}-k_{i-1})+(1-\theta)^3\theta A_i+(1-\theta)^2\theta^2B_i+(1-\theta)\theta^3C_i+\theta^4(f_i-k_i),$$

这里

$$A_i=(1+r_i)(f_{i-1}-k_{i-1})+h_i(d_{i-1}-k'_{i-1}),$$

$$B_i=r_i(f_{i-1}+f_i)+h_i\big[d_{i-1}-d_i-(r_i-1)k'_{i-1}\big]-k_i-(2r_i-1)k_{i-1},$$

$$C_i=(r_i+1)f_i-h_i(d_i+k'_{i-1})-(r_i-1)k_i.$$

如果 $A_i\le 0$, $B_i\le 0$, $C_i\le 0$，则有 $U_i(x)\le 0$ 对所有 $x\in[x_{i-1},x_i]$ 均成立，于是该定理成立。

定理4.5 给出数据 $\{(x_i,f_i,d_i,k_i^*,k_i'^*),\ i=0,1,\cdots,n\}$，且 $f_i\ge k_i^*$，则由(1)式定义的三次有理插值样条函数 $R(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上位于二次曲线段 $k^*(x)$ 之上的充分条件是：参数 $r_i(r_i\ge 3)$ 满足如下不等式组

$$\begin{cases}(1+r_i)(f_{i-1}-k_{i-1}^*)+h_i(d_{i-1}-k'^*_{i-1})\ge 0,\\ r_i(f_{i-1}+f_i)+h_i\big[d_{i-1}-d_i-(r_i-1)k'^*_{i-1}\big]-k_i^*-(2r_i-1)k^*_{i-1}\ge 0,\\ (r_i+1)f_i-h_i(d_i+k'^*_{i-1})-(r_i-1)k_i^*\ge 0.\end{cases}\tag{18}$$

定理4.6 给出数据 $\{(x_i,f_i,d_i,k_i,k_i^*,k_i',k_i'^*),\ i=0,1,\cdots,n\}$，且 $k_i^*\le f_i\le k_i$，则由(1)式定义的三次有理插值样条函数 $R(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上位于二次曲线段 $k(x)$ 之下且位于二次曲线段 $k^*(x)$ 之上的充分条件是：参数 $r_i\ (r_i\ge 3)$ 满足不等式组(16),(18)。

5 误差估计

设 $R(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的由式(1)所定义的有理插值样条函数，当 $f(x)\in C^2[a,b]$ 时，利用Peano-Kernel定理[10]，可得

$$R[f]=f(x)-R(x)=\int_{x_{i-1}}^{x_i}f''(\tau)R_x\big[(x-\tau)_+\big]\mathrm{d}\tau,$$

其中

$$R_x\big[(x-\tau)_+\big]=\begin{cases}(x-\tau)-\frac{(1-\theta)\theta^2[r_i(x_i-\tau)-h_i]+\theta^3(x_i-\tau)}{(1-\theta)^2+(1-\theta)\theta(r_i-1)+\theta^2}, & x_{i-1}<\tau<x\\ -\frac{(1-\theta)\theta^2[r_i(x_i-\tau)-h_i]+\theta^3(x_i-\tau)}{(1-\theta)^2+(1-\theta)\theta(r_i-1)+\theta^2}, & x<\tau<x_i\end{cases}$$

$$=\begin{cases}p(\tau), & x_{i-1}<\tau<x\\ q(\tau), & x<\tau<x_i\end{cases}.$$

考察作为变量 τ 的函数的核函数 $R_x[(x-\tau)_+]$ 的性质。

首先考察 $q(\tau)$ 在 $[x,x_i]$ 的性质。$q(\tau)$ 能被写成

$$q(\tau)=\frac{\theta^2[(x_i-x)-(x_i-\tau)((1-\theta)r_i+\theta)]}{(1-\theta)^2+(1-\theta)\theta(r_i-1)+\theta^2}.$$

因为

$$q(x)=\frac{\theta^2(1-\theta)(x_i-x)(1-r_i)}{(1-\theta)^2+(1-\theta)\theta(r_i-1)+\theta^2}<0,$$

$$q(x_i)=\frac{\theta^2(1-\theta)h_i}{(1-\theta)^2+(1-\theta)\theta(r_i-1)+\theta^2}>0,$$

而且 $q(\tau)$ 在 $[x,x_i]$ 上的零点 τ^* 满足如下关系

$$x_{i-1} < x < \tau^* = x_i - \frac{(1-\theta)h_i}{r_i - \theta(r_i-1)} < x_i.$$

以上情况说明，当 $\tau^* < \tau < x_i$ 时，$q(\tau) > 0$；当 $x < \tau < \tau^*$ 时，$q(\tau) < 0$。

再考察 $p(\tau)$ 在 $[x_{i-1},x]$ 的性质。因为 $p(\tau) = (x-\tau) + q(\tau)$，故

$$p(x) = q(x) < 0, \quad p(x_{i-1}) = (x - x_{i-1}) + q(x_{i-1}) = \frac{\theta(1-\theta)^2 h_i}{(1-\theta)^2 + (1-\theta)\theta(r_i-1) + \theta^2} > 0.$$

于是，$p(\tau)$ 在 (x_{i-1},x) 的零点 τ_* 为

$$\tau_* = x_i - \frac{[1+\theta(r_i-2)]h_i}{1+\theta(r_i-1)}.$$

以上情况说明，当 $x_{i-1} < \tau < \tau_*$ 时，$p(\tau) > 0$；当 $\tau_* < \tau < x$ 时，$p(\tau) < 0$。这样，有

$$\begin{aligned}
\big|R[f]\big| &\le \|f^{(2)}\|\Big[\int_{x_{i-1}}^{\tau_*} p(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{\tau_*}^{x} |p(\tau)|\mathrm{d}\tau + \int_{x}^{\tau^*} |q(\tau)|\mathrm{d}\tau + \int_{\tau^*}^{x_i} q(\tau)\mathrm{d}\tau\Big],\\
&= \|f^{(2)}\|\Big[\int_{x_{i-1}}^{\tau_*} p(\tau)\mathrm{d}\tau - \int_{\tau_*}^{x} p(\tau)\mathrm{d}\tau - \int_{x}^{\tau^*} q(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{\tau^*}^{x_i} q(\tau)\mathrm{d}\tau\Big],\\
&= \frac{h_i^2}{2}\|f^{(2)}\|\frac{w(r_i,\theta)}{v(r_i,\theta)},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
w(r_i,\theta) &= \theta^2(1-\theta)\big[\theta^3(r_i-1)^2(r_i-3) - 2\theta^2(r_i^3 - 3r_i^2 - 5r_i + 7)\\
&\quad + \theta(r_i^3 - 2r_i^2 - 16r_i + 15) + r_i^2 + 3r_i - 6\big],\\
v(r_i,\theta) &= \big[r_i - \theta(r_i-1)\big]\big[1+\theta(r_i-1)\big]\big[(1-\theta)^2 + \theta(1-\theta)(r_i-1) + \theta^2\big].
\end{aligned}$$

令

$$c_i = \max_{0<\theta<1} \frac{w(r_i,\theta)}{v(r_i,\theta)},$$

则有如下定理。

定理 5.1 设 $f(x) \in C^2(a,b)$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是区间 $[a,b]$ 上的一个分划，$R(x)$ 是由式 (1) 所定义的有理插值样条函数，当 $x \in [x_{i-1},x_i]$ 时，有

$$\| R[f] \| \le \frac{h_i^2}{2}\|f^{(2)}\| c_i.$$

6 数值例子

节插值点的导数值 d_i 按单调数组和凸数组分别采用误差阶均为 $O(h^2)$ 的逼近方法：

1) 几何平均值逼近法

$$\begin{cases}
d_0 = \Delta_1^{1+h_1/h_2}\Delta_{2,0}^{-h_1/h_2},\\
d_i = \Delta_i^{h_{i+1}/(h_{i+1}+h_i)}\Delta_{i+1}^{h_i/(h_{i+1}+h_i)}, \quad i = 1,2,\cdots,n-1,\\
d_n = \Delta_n^{1+h_n/h_{n-1}}\Delta_{n,n-2}^{-h_n/h_{n-1}}.
\end{cases}$$

2) 算术平均值逼近法

$$\begin{cases} d_0 = \Delta_1(1 + h_1/h_2) - \Delta_{2,0}(h_1/h_2), \\ d_i = (\Delta_i h_{i+1} + h_i \Delta_{i+1})/(h_{i+1} + h_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n-1, \\ d_n = \Delta_n(1 + h_n/h_{n-1}) - \Delta_{n,n-2}(h_n/h_{n-1}), \end{cases}$$

其中

$$\Delta_{2,0} = \frac{f_2 - f_0}{x_2 - x_0}, \quad \Delta_{n,n-2} = \frac{f_n - f_{n-2}}{x_n - x_{n-2}}.$$

例1 $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in [-2, -0.2]$，插值点取为 $x = [-2, -1.5, -1.0, -0.8, -0.6, -0.4, -0.2]$，导数值按几何平均值逼近法所得图像为图1，其中，左图取 $q_i = 10$，右图取 $q_i = 24$。从图1中可以看出，只要满足(10)式，就可得到保单调插值。

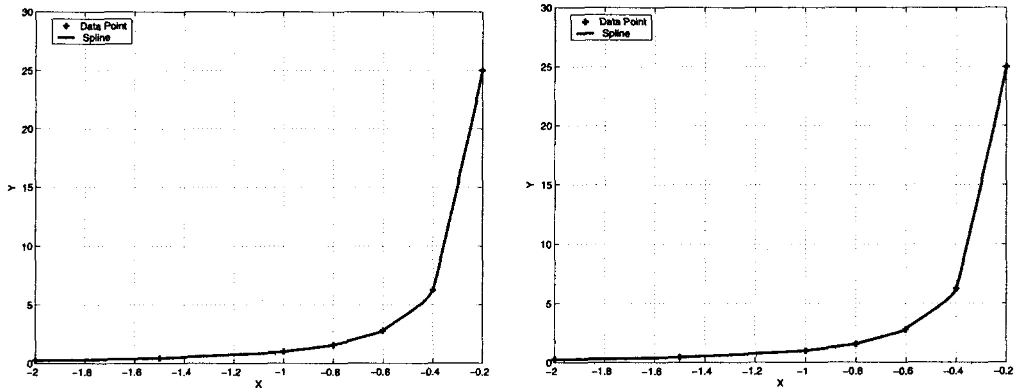

图 1: 保单调有理样条插值

例2 数据点

$$x = [-2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5],$$

$$y = [-8, -3.375, -1, -0.125, 0, 0.125, 1, 3.375, 8, 15.625].$$

图2中，左图取 $q_i = 2$，右图取 $q_i = 15$，是采用导数的算术平均值逼近法，给出的有理样条插值图形，调整 q_i 满足(11)式即可得到保凸插值。

例3 设 $f(x) = \cos^2(\frac{\pi x}{3})$。取插值结点 $0.0, 0.75, 1.5, 2.25, 3.0, 3.75, 4.5, 5.25, 6.0$，即等距划分，$h = 0.75$，其在 $[0, 6]$ 上 $R(x)$ 为由(1)所定义的有理样条曲线。取上约束曲线 $g(x)$ 和下约束曲线 $g^*(x)$ 分别为

$$g(x) = \begin{cases} 1.1 - \frac{2}{3}x, & 0 \le x < 1.5, \\ \frac{2}{3}x - 0.9, & 1.5 \le x < 3, \\ 3.1 - \frac{2}{3}x, & 3 \le x < 4.5, \\ \frac{2}{3}x - 2.9, & 4.5 \le x \le 6 \end{cases} \qquad g^*(x) = \begin{cases} 0.9 - \frac{2}{3}x, & 0 \le x < 1.5, \\ \frac{2}{3}x - 1.1, & 1.5 \le x < 3, \\ 2.9 - \frac{2}{3}x, & 3 \le x < 4.5, \\ \frac{2}{3}x - 3.1, & 4.5 \le x \le 6, \end{cases}$$

则当在第一个子区间 $[0, 0.75]$ 上取 $r_i = 4$，在其它子区间取 $r_i = 6$ 时，插值曲线 $R(x)$ 被约束于折线 $g(x)$ 与 $g^*(x)$ 之间。图 3 表示了插值曲线 $R(x)$ 完全被约束于折线 $g(x)$ 与 $g^*(x)$ 之间。

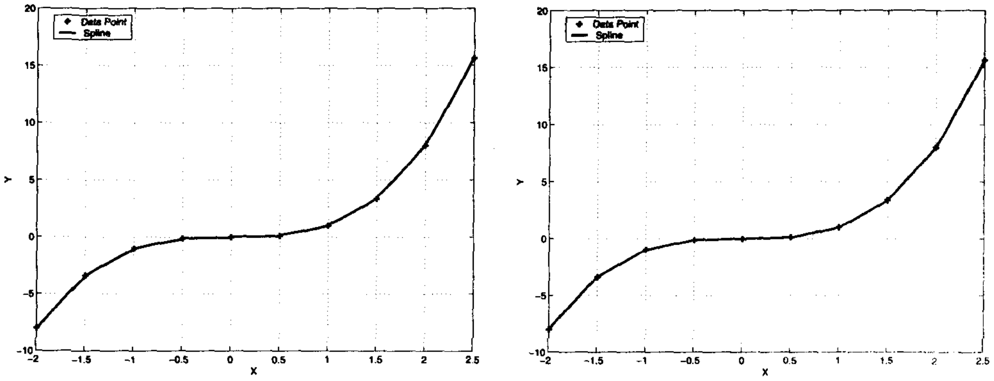

图 2: 保凸有理样条插值

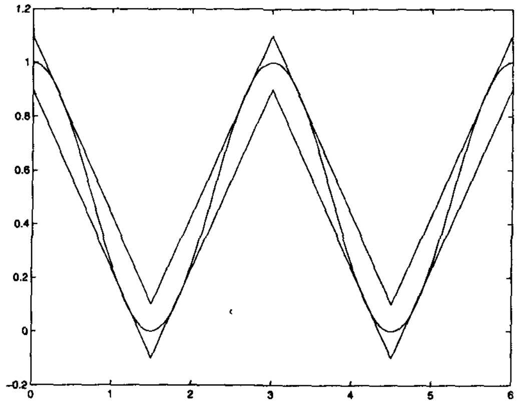

图 3: 约束 $R(x)$ 于两折线之间

参考文献：

[1] 王仁宏，朱功勤. 有理函数逼近及其应用[M]. 北京：科学出版社，2004
Wang R H, Zhu G Q. Rational Function Approximation and its Application [M]. Beijing: Science Press, 2004

[2] Sarfraz M. Rational spline interpolation preserving the shape of the monotonic data[C]// Proceedings of the Computer Graphics International'97, Belgium: IEEE Computer Society, 1997: 238-244

[3] Duan Q. Weighted rational cubic spline interpolation and its approximation[J]. Computational and Applied Mathematics, 2000, 117(2): 121-135

[4] Schabach R. Spezielle rational spline function[J]. Journal of Approximation Theory, 1973, 7: 281-292

[5] Schumaker L L. Spline Functions: Basic Theory[M]. New York: Wiley Inter Science, 1981

[6] Muehlbach G. On interpolation by rational functions with prescribed poles with applications to multivariate interpolation[J]. J Comput Appl Math, 1990, 32: 203-216

[7] Delbourgo R, Gregory J A. Shape preserving piecewise rational interpolation[J]. SIAM J Sci Comput, 1985, 6: 967-976

[8] 张希华，包芳勋. 一种有理插值曲线的保凸控制问题[J]. 工程图学学报，2005, 26(2): 77-82
Zhang X H, Bao F X. Convexity control of a rational interpolation curves[J]. Journal of Engineering Graphics, 2005, 26(2): 77-82

[9] Duan Q, Djidjeli K, Price W G, et al. A rational cubic spline based on function values[J]. Comput & Graphics, 1998, 22: 479-486

[10] 黄友谦，李岳生. 数值逼近(第二版)[M]. 北京：高等教育出版社，1987
Huang Y Q, Li Y S. Numerical Approximation (Second Edition)[M]. Beijing: Higher Education Press, 1987

The Approximation Properties of a Cubic Rational Spline Interpolation

LIU Lin, TANG Yue-hong

(Department of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016)

Abstract: In the geometric shape design, the shape preserving interpolation of a curve is an important topic. A new method for rational spline interpolation of order $(3,2)^k$ $(k=1,2)$ with control parameter and prescribed poles is constructed. For given data satisfying monotonicity or convexity, a shape preserving interpolation function can be generated by choosing suitable parameters. The issues on shape control are discussed, and the sufficient conditions that constrain the interpolating curves to be above, below or between the given broken lines or piecewise quadric curves are derived. With the Peano-Kernel theory, the approximation properties of this rational spline are studied. The numerical examples show the effect of these methods.

Keywords: rational interpolation; spline; constraint interpolation; approximation

Received: 24 Nov 2008. **Accepted:** 16 Sep 2009.
Foundation item: Found of Reviving Science Plan of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics.